DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

- **Diferencijalnom jednačinom prvog reda** zovemo svaku jednačinu koja povezuje nezavisno promjenljivu x sa traženom funkcijom i njenim izvodom y′, tj. jednačinu

$$F(x,y,y') = 0 \quad (*)$$

- **Rešenjem diferencijalne jednačine** (*) zovemo svaku funkciju čijom zamjenom u jednačini (*) ta jednačina prelazi u identitet.
- **Opštim rješenjem** ili **opštim integralom** diferencijalne jednačine I reda zovemo svaku funkciju u kojoj figuriše proizvoljna konstanta, a koja jeste rješenje te jednačine.
- **Partikularno** je ono rješenje koje se dobija iz opšteg za datu vrijednost proizvoljne konstante.

Neke diferencijalne jednačine I reda

- Jednačina sa razdvojenim promjenljivima
- Homogena jednačina
- Linearna diferencijalna jednačina I reda

Jednačina sa razdvojenim promjenljivima

- Opšti oblik ove jednačine je $y' = f(x) \cdot g(y)$, odnosno

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Rešavanje se svodi na izračunavanje dva integrala

Primjer 1. Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{3e^x}{y}$$

Rešenje: Množeći sa y dobijamo $yy' = 3e^x$, odnosno $ydy = 3e^x dx$, odakle, integracijom lijeve i desne strane, dobijamo

$$\int ydy = \int 3e^x dx \quad \Rightarrow \frac{y^2}{2} = 3e^x + c_1$$

$$\Rightarrow y^2 = 6e^x + 2c_1$$

Označavajući $2c_1$ sa c, dobijamo opšte rješenje date jednačine:

$$y^2 = 6e^x + c$$

Primjer 2. Naći one varijabilne troškove koji ispunjavaju uslov: pri svakoj proizvodnji granični varijabilni troškovi su jednaki prosječnim varijabilnim troškovima, tj.

$$T_v' = \frac{T_v}{x}$$

$$\frac{dT_v}{dx} = \frac{T_v}{x} \quad \Rightarrow \frac{dT_v}{T_v} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|T_v| = \ln x + c_1 \Rightarrow \ln|T_v| = \ln|x| + \ln|c|$$

odakle je $T_v = cx$, što znači da su granični varijabilni troškovi jednaki prosječnim varijabilnim troškovima samo ako su varijabilni troškovi proporcionalni.

Primjer 3. Uzmemo li u obzir da cijena p ipak nije nezavisno promjenljiva veličina nego da zavisi i od momenta t u kojem se proizvod traži, i tražnja x će zavisiti od momenta t kao i od rasta cijene, tj. biće

$$x = f\left[p(t), p'(t)\right]$$

Slično važi i za ponudu, tj. $y = g\left[p(t), p'(t)\right]$

Ravnoteža na tržištu, u ovom slučaju **dinamička** ravnoteža, će se postići ako je

$$f\left[p(t), p'(t)\right] = g\left[p(t), p'(t)\right]$$

Neka je, na primjer, $x = 40 - 2p + 5p'$ i $y = 3p - 20 + 10p'$
Izjednačavajući tražnju i ponudu dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$40 - 2p + 5p' = 3p - 20 + 10p'$$

čije je opšte rješenje

$\ln|p - 12| = -t + c_1$, odnosno, ako je $\ln|c| = c_1$

$$p = Ce^{-t} + 12$$

Ako je početna cijena (tj. za $t = 0$) $p(0) = 30$, onda će se dinamička ravnoteža na tržištu održavati ako se cijena mijenja sa momentom t po uslovu

$$p = 18e^{-t} + 12$$

Ako cijena ne zavisi od momenta t, u navedenom primjeru funkcije tražnje i ponude glase:

$$x = 40 - 2p \quad i \quad y = 3p - 20,$$

a ravnoteža (statička) se ostvaruje pri cijeni $p = 12$.

Pustimo li da u dinamičkoj ravnotežnoj cijeni $t \to \infty$ dobijamo da $p(t) \to 12$, što znači da se, u ovom slučaju dinamička ravnotežna cijena približava statičkoj.

Homogena jednačina

Opšti oblik ove jednačine je $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Uvođenjem nove promjenljive, $u = \frac{y}{x}$

dobija se $y = ux$, odnosno $y' = u'x + u$, pa se data jednačina svodi na jednačinu $u' \cdot x + u = f(u)$, tj. na jednačinu sa razdvojenim promjenljivima.

Primjer 4. Uvodeći zamjenu $u = \frac{y}{x}$

dakle: $y' = u'x + u$ jednačinu $y' = \frac{y}{x} - 1$

svodimo na jednačinu $u + u'x = u - 1$, odnosno $u' = -\frac{1}{x}$

čije je opšte rješenje

$$u = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

Vraćajući se smjeni $y = ux$, dobijamo opšte rješenje date jednačine:

.

$$y = x \cdot \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

Primjer 5. Naći ono partikularno rješenje homogene jednačine $2xydy = (y^2 - x^2)dx$ koje ispunjava uslov $y(4) = 2$.

Rešenje: Uvodeći malopređašnju zamjenu, dobijamo opšte rješenje date jednačine: $x^2 + y^2 = cx$. Iz uslova $x = 4 \Rightarrow y = 2$, dobijamo da je $c = 5$, pa je traženo partikularno rješenje

$$x^2 + y^2 - 5x = 0.$$

Linearna diferencijalna jednačina I reda

Opšti oblik ove jednačine je $y' + P(x)y = Q(x)$
Za jednačinu $y' + P(x)y = 0$ kažemo da je odgovarajuća homogena jednačina date jednačine. Njeno rješenje je

$$\ln|y| = -F(x) + c_1$$

Ako je F(x) primitivna funkcija funkcije P(x), onda je

$$\ln|y| = -\int P(x)dx \quad \text{ili} \quad y = ce^{-F(x)}$$

opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine. Da bi dobili rješenje date jednačine c ćemo birati kao funkciju u(x), tako da

$$y = u(x)e^{-F(x)}$$

bude rješenje date jednačine.

Nehomogeni slučaj

$FORMULA:$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right)$$

Primjer 1. Jednačina $y' - \frac{1}{x} y = x^2$

je linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Njoj odgovarajuća homogena jednačina je

$$y' - \frac{1}{x} y = 0$$

čije je opšte rješenje y = cx. Formalnom zamjenom c = u(x) to rješenje ima oblik y = xu(x). Funkciju u(x))=u ćemo odrediti tako da y = ux bude opšte rješenje date jednačine: kako je y′ = u′x + u, zamjenom u datoj jednačini dobijamo diferencijalnu jednačinu sa razdvojenim promjenljivim:

$$u'x + u - \frac{1}{x} ux = x^2 \Rightarrow u'x = x^2 \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + c$$

Prema tome, opšte rješenje date jednačine je

$$y = x\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$